Ogólna teoria miary
Lista 1 (pierścienie i półpierścienie)

Definicja. Rodzinę S podzbiorów zbioru X nazywamy *półpierścieniem* jeśli spełnione są warunki

`(Przekrój)` $\quad \forall_{A,B\in S} \quad A\cap B\in S,$

`(Pseudo-Różnica)` $\quad \forall_{A,B\in S} \ \exists_{\{C_1,\dots,C_n\}\subset S} \quad A\setminus B = C_1\sqcup C_2\sqcup\dots\sqcup C_n,$

gdzie symbol „$\sqcup$" oznacza sumę rozłączną zbiorów.

Zad 1. Czy każdy niepusty półpierścień zawiera zbiór pusty?

Zad 2. Pokazać, że w definicji półpierścienia warunek `(Pseudo-Różnica)` można zastąpić warunkiem

`(Pseudo-Różnica')` $\quad \forall_{\substack{A,B\in S\\ A\subset B}} \ \exists_{\substack{D_0,\dots,D_n\subset X\\ D_i\setminus D_{i-1}\in S}} \quad B=D_0\subset D_1\subset\dots\subset D_n = A.$

Zad 3. Sprawdzić, czy następujące rodziny zbiorów są półpierścieniami podzbiorów X:

a) $P=\{[a,b]: a,b\in\mathbb{R}\}$, $X=\mathbb{R}$, b) $P=\{(a,b): a,b\in\mathbb{R}\}$, $X=\mathbb{R}$,

c) $P=\{[a,b): a,b\in\mathbb{R}\}$, $X=\mathbb{R}$, d) $P=\{[a,b)\times[c,d): a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$, $X=\mathbb{R}^2$,

e) $P=\{\{z\in\mathbb{C}: |z|<R\}: R\in\mathbb{R}\}$, $X=\mathbb{C}$,

f) $P=\{\{z\in\mathbb{C}: r\le|z|<R\}: R,r\in\mathbb{R}\}$, $X=\mathbb{C}$.

Zad 4. Które z przestrzeni topologicznych posiadają tę własność, że klasa zbiorów otwartych tworzy półpierścień?

Definicja. Rodzinę S podzbiorów zbioru X nazywamy *pierścieniem* jeśli spełnione są warunki

`(Suma)` $\quad \forall_{A,B\in S} \quad A\cup B\in S,$

`(Różnica)` $\quad \forall_{A,B\in S} \quad A\setminus B\in S.$

Zad 5. Pokazać, że każda rodzina zbiorów spełniająca warunek `(Różnica)` jest półpierścieniem, ale nie każdy półpierścień spełnia warunek `(Różnica)`. Płynie stąd zatem wniosek, że każdy pierścień jest półpierścieniem, ale nie każdy półpierścień jest pierścieniem.

Zad 6. Niech P będzie półpierścieniem podzbiorów X. Wykazać, że rodzina

$$R=\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i : A_i\in P,\ i=1,\dots,n\right\}$$

jest najmniejszym pierścieniem zawierającym P.

Zad 7. Czy w definicji pierścienia można zastąpić warunek `(Suma)` warunkiem `(Przekrój)`?

Zad 8. Sprawdzić, czy w definicji pierścienia można zastąpić warunek `(Różnica)` warunkiem

`(Różnica Symetryczna)` $\quad \forall_{A,B\in S} \quad A\Delta B\in S,$

gdzie $A\Delta B = A\setminus B\cup B\setminus A$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów.

Zad 9. Wykazać, że rodzina zbiorów jest pierścieniem wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki `(Przekrój)` i `(Różnica Symetryczna)` .

Zad 10. Udowodnić, że jeśli R jest pierścieniem zbiorów oraz zdefiniujemy na R operacje „mnożenia" i „dodawania" wzorami

$$A\odot B := A\cap B,\qquad A\oplus B := A\Delta B,$$

to R staje się pierścieniem w sensie algebraicznym. Jest to tak zwany *pierścień Boole'a.*